WYZNACZANIE ELIPSOIDY BEZWŁADNOŚCI BRYŁY SZTYWNEJ 11

Moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi przechodzącej przez środek masy bryły zależy od kierunku tej osi. Zależność tę można przedstawić geometrycznie w sposób następujący: Narysujmy pęk prostych przechodzących przez środek masy O bryły. Na każdej prostej odłóżmy odcinek o początku w punkcie O i długości równej $R_i = \frac{1}{\sqrt{I_i}}$, gdzie I_i jest momentem bezwładności bryły względem osi *i* która pokrywa się z daną prostą. Końce tych odcinków dla wszystkich możliwych prostych przechodzących przez punkt O utworzą powierzchnię zamkniętą - jest nią elipsoida. Nazwano ją elipsoidą bezwładności bryły sztywnej względem środka masy bryły. Równanie tej elipsoidy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

gdzie: x,y,z to współrzędne punktów na powierzchni elipsoidy w układzie współrzędnych, którego początek znajduje się w środku masy bryły (punkt O), a kierunki osi są zgodne z kierunkami głównych osi bezwładności w bryle[1]; zaś a,b,c są długościami trzech półosi elipsoidy, zdefiniowanymi jako:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_x}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{I_y}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{I_z}} \tag{2}$$

Wielkości: I_x, I_y, I_z są momentami bezwładności bryły wyznaczonymi względem osi głównych bryły. Znając elipsoidę bezwładności dla środka masy bryły można obliczyć moment bezwładności I_i względem dowolnej osi przechodzącej przez środek masy bryły z równania: $I_i = 1/R_i^2$, gdzie $R = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$ jest długością odcinka OP łączącego punkt P(x_p,y_p,z_p) przebicia elipsoidy bezwładności przez prostą o kierunku wybranej osi *i*. Współrzędne punktu P można znaleźć rozwiązując dwa układy równań:

1. Równanie elipsoidy (1) ze znanymi momentami bezwładności względem osi głównych,
2. Równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych: ($x_0=y_0=z_0=0$) i wybrany punkt o współrzędnych (x_1,y_1,z_1), leżący np. na powierzchni bryły, określający jednoznacznie kierunek wybranej osi. Równanie to ma postać:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} \tag{3}$$

Wartość momentu bezwładności bryły sztywnej I_i względem osi *i* przechodzącej przez środek masy bryły wyznacza się wykorzystując zależność okresu drgań T_{1i} fizycznego wahadła torsyjnego od I_i. Ma ona postać:

$$T_{1i} = 2\pi\sqrt{\frac{I_i + I_r}{D}} \tag{4}$$

gdzie I_r- moment bezwładności ramki, w której mocujemy bryłę, D - moment kierujący zależny od rozmiarów i właściwości sprężystych drutu, na którym zawieszona jest ramka z bryłą. Wartości I_r i D można wyznaczyć przez pomiar 1) okresu drgań T_0 samej ramki, gdyż wtedy:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_r}{D}} \tag{5}$$

oraz 2) okresu drgań ramki T_2 z bryłą wzorcową o znanym momencie bezwładności. Jako bryłę wzorcową wygodnie jest wybrać walec o znanej masie M i promieniu r, którego moment bezwładności I_w względem osi jest równy 1/2 Mr^2. Okres drgań takiego walca z ramką jest równy:

---

[1] **Osie główne dla brył posiadających osie symetrii, są to osie symetrii, przechodzące przez środek masy.**

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_w + I_r}{D}} \tag{6}$$

Na podstawie wzorów (4), (5) i (6) otrzymuje się następujący związek między I_i i okresami drgań opisanych wyżej układów

$$I_i = I_w \frac{T_{1i}^2 - T_0^2}{T_2^2 - T_0^2} \tag{7}$$

Korzystając z tego wzoru nie musimy wyznaczać bezpośrednio wartości momentu kierującego D.

Warto dodać, że znając moment bezwładności bryły względem osi przechodzącej przez środek masy można, korzystając z twierdzenia Steinera, obliczyć moment bezwładności bryły względem każdej innej osi do niej równoległej, np. przechodzącej przez krawędź prostopadłościanu.