Uniwersytet Wrocławski, Instytut Fizyki Doświadczalnej, I Pracownia

Ćwiczenie nr 7

BADANIE DRGAŃ WAHADŁA SKRĘTNEGO (TORSYJNEGO)

I. WSTĘP

Wahadło skrętne badane w tym ćwiczeniu i przedstawione w części eksperymentalnej na Rys. 2, jest uproszczonym modelem mechanicznym cząsteczki chemicznej zbudowanej z dwu atomów (np. HCl, NaCl itp.). Cząsteczki takie mogą wykonywać w ośrodku ruchy rotacyjne, np. pod wpływem pola elektrycznego fali elektromagnetycznej. Częstość drgań rotacyjnych większości cząsteczek leży w podczerwieni. Dlatego obserwuje się je przy użyciu spektrofotometrów pracujących w podczerwonej części widma fal elektromagnetycznych. Badane wahadło mechaniczne jest dobrą ilustracją, wyjaśniającą wpływ geometrii układu na częstość drgań.

Moment bezwładności I jest wielkością fizyczną, która przy opisie ruchu obrotowego bryły sztywnej[1] spełnia rolę, którą pełni masa ciała przy opisie ruchu postępowego punktu materialnego. Łatwo to stwierdzić przez porównanie zapisu II zasady dynamiki dla obu typów ruchu. W ruchu postępowym ma ona postać **F = ma,** podczas gdy w ruchu obrotowym wokół stałej osi **N = I**$\boldsymbol{\varepsilon}$, gdzie **F** jest siłą działającą na ciało, m jego masą, **a** przyspieszeniem liniowym, **N** – momentem siły powodującej obrót, I momentem bezwładności względem osi obrotu, zaś $\boldsymbol{\varepsilon}$ przyspieszeniem kątowym.

Dla punktu materialnego o masie m poruszającego się po okręgu o promieniu r, moment bezwładności względem osi prostopadłej do okręgu i przechodzącej przez jego środek wynosi [1, 2]:

$$I \equiv mr^2 \tag{2}$$

Moment bezwładności I zbioru n punktów materialnych sztywno ze sobą związanych, oblicza się sumując wyrażenia (2) dla każdego z tych punktów.

$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{3}$$

gdzie m_i jest masą i- tego punktu materialnego, a r_i jego odległością od osi obrotu.

Dla bryły sztywnej, której masa jest rozłożona w sposób ciągły (makroskopowo), zamiast sumy, obliczamy całkę:

$$I \equiv \int_m r^2 dm \tag{4}$$

Całkowanie "po masie" wykonuje się, korzystając z faktu, że dla brył jednorodnych (tzn. wykonanych z jednolitego materiału), element masy dm można zastąpić iloczynem gęstości substancji ρ i elementu objętości dV, czyli dm = ρdV. Wtedy całkuje się po objętości, a dla brył mających symetrię obrotową (walec, kula, toroid), obliczenia momentu bezwładności względem osi symetrii, można sprowadzić do zwykłej całki jednej zmiennej, wyrażając element objętości przez jego odległość r od osi obrotu.

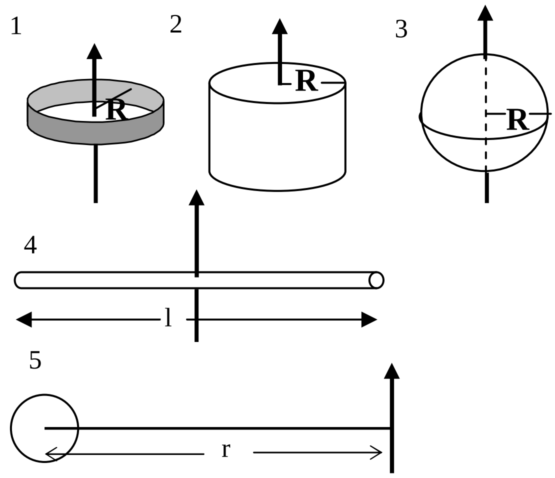
W Tabeli 1 podano przykłady wzorów na momenty bezwładności niektórych jednorodnych brył sztywnych, a na Rys. 1. pokazano kształty tych brył i osie, dla których wykonano obliczenia.

---

[1] Bryłą sztywną nazywamy zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości nie ulegają zmianie w czasie ruchu. Oznacza to, że ciało takie nie ulega odkształceniom.

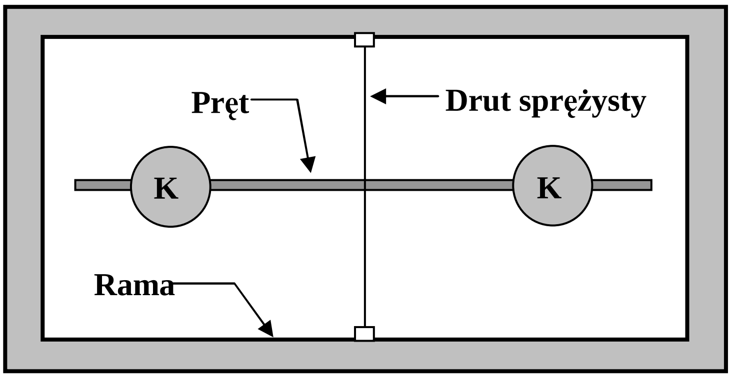
Tabela 1

L.p	Bryła	I
1	Cienki pierścień	mR^2
2	Walec pełny	$1/2\ mR^2$
3	Kula pełna	$2/5\ mR^2$
4	Cienki pręt wzgl. osi ⊥	$1/12\ ml^2$
5	Mała kula, daleko od osi	mr^2



II. OPIS EKSPERYMENTU

W niniejszym ćwiczeniu, do pomiarów momentu bezwładności wybrano układ mechaniczny, wykonujący drgania rotacyjne. Na sztywnej ramie (Rys.2.), zamocowano pionowo drut sprężysty, a na nim poprzecznie cienki pręt stalowy. Na ten pręt nasunięto dwie kulki K. Odległość kulek od osi obrotu (drutu) można zmieniać, przesuwając je symetrycznie na pręcie. Można też wybrać dwie pary kulek większych lub mniejszych, różniących się masami, a przez to dodatkowo zmieniać moment bezwładności wahadła. Badany układ stanowi skrętne wahadło fizyczne. Obrotowi pręta o kąt α, towarzyszy skręcenie drutu o taki sam kąt. Skutkiem tego pojawi się moment sił sprężystych N_s, powracający układ do położenia, w którym drut nie jest odkształcony. Dla małych kątów skręcenia, zgodnie z prawem Hooke'a, możemy napisać:



Rys. 2. Wahadło skrętne do badania zależności okresu drgań od momentu bezwładności

$$N_s = -D\,\alpha \tag{5}$$

Współczynnik proporcjonalności D, jest nazywany momentem kierującym wahadła, a jego wartość zależy od geometrii i właściwości sprężystych drutu.

Wskutek działania momentu sił sprężystych, opisanego wzorem (5), układ wykonuje drgania, których okres jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6}$$

Moment bezwładności I badanego układu jest sumą momentu bezwładności pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek ($I_p = 1/12\ m_p\ l^2$), oraz momentu bezwładności obu kul względem tej samej osi I_k. Ponieważ mają one skończone rozmiary, to zgodnie z twierdzeniem Steinera[2] musimy jeszcze dodać momenty bezwładności obu kul względem osi przechodzących przez środek masy każdej kuli.

[2] Twierdzenie Steinera mówi że moment bezwładności I ciała względem dowolnej osi O, jest równy sumie momentu bezwładności I_1 liczonego względem równoległej do niej osi O' przechodzącej przez środek masy ciała i iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości d pomiędzy osiami: $I = I_1 + md^2$

$$I_k = I_s + 2m_k r^2 \qquad (7)$$

gdzie m_k - masa kulki, , r - odległość środków mas kulek od osi obrotu (drutu). Dlatego wzór na okres drgań badanego układu ma postać:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_p + I_s + 2m_k r^2}{D}} \qquad (8)$$

a po podniesieniu obu stron do kwadratu:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(I_p + I_s + 2m_k r^2\right) = \frac{4\pi^2}{D}\left(\frac{1}{12}m_p l^2 + \frac{4}{5}m_k R^2 + 2m_k r^2\right) \qquad (8a)$$

gdzie m_p - masa pręta, l - długość pręta, R - promień kulki. Zauważmy, że tylko trzeci wyraz wewnątrz nawiasu zależy od r^2, a pozostałe nie zmieniają się.

Zależność T^2 od r^2 jest więc linią prostą typu:

$$y=Ax+B \qquad (8b)$$

gdzie $y=T^2$, $x= r^2$, $A = \frac{8\pi^2 m_k}{D}$ natomiast $B = \frac{\pi^2}{3D}m_p l^2 + \frac{16\pi^2}{5D}m_k R^2$.

Z równań (8a) i (8b) będziemy korzystać przy analizie wyników doświadczalnych.

Do obliczeń konieczna jest znajomość wartości momentu kierującego D. Teoretycznie można by go obliczyć znając geometrię i własności sprężyste drutu, lub wyznaczyć eksperymentalnie zgodnie ze wzorem (5), mierząc moment siły powodujący wychylenie o kąt α. Jest to jednak trudne i mało dokładne. Dlatego prościej jest wykorzystać fakt, że okres drgań samego pręta T_p, (bez kul), jest równy:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{I_p}{D}} \qquad (9)$$

gdzie $I_p = \frac{1}{12}m_p l^2$ (patrz tabela 1).

Podnosząc obie strony do kwadratu i przekształcając, obliczamy D:

$$D = \frac{4\pi^2 I_p}{T_p^2} = \frac{4\pi^2 m_p l^2}{12T_p^2} \qquad (10)$$

Występująca w tym wzorze masa pręta m_p jest równa iloczynowi gęstości ρ materiału, z którego jest pręt wykonany (dla stali $\rho = 7.9$ g/cm^3) i objętości V pręta, czyli:

$$m_p = \rho \cdot V = \rho l \cdot \frac{\pi a^2}{4} \qquad (11)$$

gdzie l - oznacza długość pręta, zaś a - jego średnicę. Po podstawieniu wzoru (11) do wzoru (10) mamy:

$$D = \frac{\pi^3 l^3 a^2 \rho}{12T_p^2} \qquad (12)$$

III. POMIARY

Wyznaczenie wielkości potrzebnych do obliczenia momentu kierującego D

1. Zmierzyć pięciokrotnie długość **l** i średnicę **a** pręta**.** Obliczyć wartości średnie.
2. Wyznaczyć okres drgań $\mathbf{T_p}$ pręta bez kul, poprzez pomiar 20-tu pełnych wahnięć. Pomiar ten powtórzyć pięciokrotnie i obliczyć wartość średnią.

<u>Wyznaczenie okresu drgań T wahadła dla różnych odległości r kulek od osi obrotu.</u>

W doświadczeniu korzystamy z dwu par kulek, różniących się masami i średnicami. Masy i średnice kulek wyznaczamy, korzystając z wagi i suwmiarki. Kulki rozmieszczamy symetrycznie względem środka pręta. Pręt ma naniesioną skalę odległości od środka co 1 cm. Na podziałkach skali ustawiamy brzegi kulek. Ponieważ we wzorze (8a) r oznacza odległość środka masy, a nie brzegu kulki od osi obrotu, musimy to uwzględnić przy określeniu wartości r.

1. Rozmieścić parę jednakowych kulek w najbliższej odległości r od drutu, symetrycznie względem środka pręta.
2. Włączyć elektromagnes, a następnie zbliżyć do niego bliższy koniec pręta, tak by pręt pozostał w pozycji wychylonej.
3. Po wyłączeniu elektromagnesu układ zacznie wykonywać drgania. Zmierzyć dwukrotnie czas **t** wykonania 20-tu wahnięć. Aby obliczyć okres drgań, otrzymany wynik podzielić przez 20
4. Punkty 1-3 powtórzyć dla kolejnych 9-ciu odległości r.
5. Punkty 1-4 wykonać dla drugiej pary kulek.

IV. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

<u>Wyznaczenie momentu kierującego D.</u>

1. Na podstawie wzoru (11) obliczyć masę m_p pręta stalowego.
2. Obliczyć moment bezwładności pręta wg wzoru $I_p = \frac{1}{12} m_p l^2$.
3. Na podstawie wzoru (12) obliczyć wartość momentu kierującego D

<u>Sporządzenie wykresu zależności $T^2 = f(r^2)$</u>

Obliczoną wyżej wartość D podstawiamy do wzorów na współczynniki A i B występujące w równaniu (8b).

$$A = \frac{8\pi^2 m_k}{D} \qquad B = \frac{\pi^2}{3D} m_p l^2 + \frac{16\pi^2}{5D} m_k R^2$$

Przypominamy, że m_{k1}=32,6 g, R_{k1}=1 cm, m_{k2}=64,2 g, R_{k2}=1,25 cm, m_p=30,77 g, l=31 cm,
Wartości współczynników A i B musimy obliczyć dla obu par kulek, gdyż różnią się one masami.
Dla każdej pary kulek należy sporządzić dwa wykresy: wyników doświadczalnych i obliczeń teoretycznych.

1. *Wykres doświadczalny*: Na podstawie bezpośrednich pomiarów r i T obliczyć pary wartości T^2 i r^2. Wyniki obliczeń przedstawić graficznie odkładając na osi odciętych (poziomej) wartości r^2 , a na osi rzędnych T^2. Metodą regresji liniowej [3] znaleźć parametry prostej (A*, ΔA*, B*, ΔB*) stanowiącej najlepsze przybliżenie liniowe zależności $T^2(r^2)$. Wykreślić tę prostą.
2. *Wykres teoretyczny*: Znając wartości współczynników A i B wykreślić równanie prostej:

$$T^2 = A\, r^2 + B$$

Wyniki przedstawić na jednym arkuszu papieru milimetrowego, lub przy sporządzaniu wykresu na komputerze, na jednym arkuszu formatu A4. We wnioskach omówić przyczyny ewentualnych różnic pomiędzy obu wykresami.

V. LITERATURA

[1] I. W. Sawieliew, Kurs Fizyki, tom 1, PWN Warszawa 1989, str. 160 i nast.
[2] A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki, tom1, PWN Warszawa 1976, str. 553 i nast.
[3] H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999, str. 68 i nast.

VI. ZAGADNIENIA DO KOLOKWIUM

Ruch bryły sztywnej wokół środka masy. Moment bezwładności. Twierdzenie Steinera.
Budowa i zasada działania wahadła torsyjnego – okres drgań harmonicznych wahadła. Wzór na okres drgań wahadła skrętnego i moment kierujący – D.