

ĆWICZENIE NR 1

CZ. 2

PRAWA STATYSTYCZNE I NIEPEWNOŚCI POMIAROWE (wg najnowszych norm międzynarodowych)

Wstęp

Ta część doświadczenia ma za zadanie sprawdzenie podstawowych praw statystycznych oraz ocenę niepewności wykonanych pomiarów. W tym celu należy wykonać rejestrację liczby zliczeń impulsów (N) pochodzących od wybranego preparatu promieniotwórczego:

- kilkakrotnie, w równych okresach czasu t , przy czym liczba pomiarów n musi być > 5 ,
- jednorazowo w ciągu pewnego czasu t_1 , który powinien być kilkakrotnie dłuższy od czasu t .

Elementy statystyki i oceny niepewności pomiarowych

Wynik doświadczenia można traktować jako przyporządkowanie temu doświadczeniu pewnej wartości x , której nie da się dokładnie przewidzieć mimo sprecyzowania warunków doświadczenia. Wykonany pomiar obarczony jest niepewnością pomiarową i stanowi przybliżenie wartości rzeczywistej.

Prawidłowy sposób zapisu wartości x wielkości mierzonej jest następujący

(wartość wielkości mierzonej $\pm$ niepewność pomiarowa) jednostka

przy czym obowiązuje zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności.

Istnieją dwie podstawowe metody oceniania niepewności pomiarowych:

- metoda typu A – opiera się na statystycznej analizie serii n pomiarów, które tworzą tzw. próbę losową. Interesującym nas parametrem jest odchylenie standardowe, którego estymator utożsamiany jest z niepewnością pomiaru. Pozwala to jednak uzyskać niepewność związaną tylko z błędem przypadkowym,
- metoda typu B – obejmuje wszystkie inne sposoby oceny niepewności niż statystyczna analiza wyników serii pomiarów. Głównie opiera się ona na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności. Metoda ta jest jedynym sposobem oceny błędu systematycznego, ale może być zastosowana do oceny błędu przypadkowego jeżeli dysponujemy wynikiem tylko jednego pomiaru.

Jeżeli jednocześnie występują oba rodzaje błędów (systematyczny oraz przypadkowy) to niepewności z nimi związane należy określić za pomocą odpowiadającej im metody a obydwa przyczynki zsumować geometrycznie.

Metoda typu A. Statystyczna ocena niepewności pomiaru (niepewność pomiarowa średniej arytmetycznej)

Wykonujemy serię n pomiarów, w i -tym pomiarze uzyskujemy wynik N_i . Otrzymujemy pewną próbę losową, którą traktujemy jako n realizacji zmiennej losowej o wartości oczekiwanej $E(N)$ utożsamianej z wartością rzeczywistą N_0 oraz odchyleniu standardowym σ . W większości przypadków średnia arytmetyczna jest najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej. Średnia arytmetyczna liczby zliczeń impulsów N z n pomiarów równa się:

$$\bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n},$$

gdzie: n – liczba wykonanych pomiarów,

N_i – liczba zliczeń impulsów w i -tym pomiarze.

Jeżeli bierzemy pod uwagę liczbę zliczeń impulsów N na jednostkę czasu t (tzw. szybkość zliczeń I) to średnia arytmetyczna tej wielkości otrzymana z n – pomiarów równa się:

$$\bar{I} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n}, \quad I_i = \frac{N_i}{t},$$

gdzie: I_i – szybkość zliczeń w i -tym pomiarze.

Miarą rozrzutu wyników pomiaru jest parametr statystyczny zwany estymatorem odchylenia standardowego lub odchyleniem standardowym eksperymentalnym, a który w przypadku pomiaru szybkości zliczeń I wyrażony jest wzorem:

$$S_I = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n-1}}.$$

Wielkości S_I można by utożsamiać z niepewnością pomiaru, gdybyśmy za jego wynik przyjęli jakąkolwiek i -tą wartość N_I . Ponieważ za wynik pomiaru przyjmujemy średnią arytmetyczną, niepewność pomiaru szybkości zliczeń utożsamiamy z odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej arytmetycznej. Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej jest $\sqrt{n}$ razy mniejsze od wartości odchylenia standardowego eksperymentalnego wobec czego:

$$S_{\bar{I}} = \frac{S_I}{\sqrt{n}}.$$

A więc niepewność pomiarowa średniej arytmetycznej wynosi

$$u(\bar{I}) \equiv s_{\bar{I}} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2}{n(n-1)}}$$

i nazywa się niepewnością standardową szybkości zliczeń.

Wielkości S_I , $S_{\bar{I}}$ są równe prawdziwym wielkościom odchylenia standardowego tylko w granicy $n \rightarrow \infty$. Gdy liczba pomiarów n jest skończona, niepewność pomiaru znamy ze skończoną niezbyt wielką dokładnością:

Tabela 1
Względna niepewność oceny odchylenia standardowego s_x i $s_{\bar{x}}$ dla serii n pomiarów
(u nas x odpowiada liczbie zliczeń impulsów N w czasie t)

Liczba pomiarów	2	3	4	5	6	8	10	100
Niepewność oceny	43%	38%	34%	31%	28%	25%	22%	7%

Z powyższej tabeli wynika, że powtarzanie pomiaru zmniejsza niepewność spowodowaną błędem przypadkowym i umożliwia oszacowanie niepewności z coraz większą dokładnością.

Z zasady uważa się, że trzeba wykonać co najmniej 6 – 10 pomiarów dla określenia odchylenia standardowego. Pozwala to na ocenę niepewności z dokładnością rzędu 30-20%. Jednakże nadmierne zwiększanie liczby pomiarów jest niecelowe ponieważ zwiększenie dokładności wraz ze wzrostem n jest bardzo powolne. Zmniejszenie wielkości niepewności osiągamy raczej drogą poprawy techniki pomiaru oraz zwiększeniem czasu poszczególnych pomiarów.

Wykonywanie małej liczby pomiarów od 2 do 3 ma sens jako sprawdzian powtarzalności wyniku pomiaru. Za wynik pomiaru przyjmujemy wtedy średnią arytmetyczną, ale nie należy obliczać niepewności w przedstawiony powyżej sposób. W takim przypadku zastosujemy jedną z metod typu B.

Metoda typu B. Przypadek niepewności pomiaru średniej liczby zdarzeń przypadkowych (niepewność standardowa)

Jądra promieniotwórcze rozpadają się z pewnym prawdopodobieństwem stałym w czasie, i tylko to średnie prawdopodobieństwo jesteśmy w stanie określić. Nigdy nie możemy przewidzieć kiedy konkretne jądro ulegnie rozpadowi. To właśnie sprawia, że liczba zliczeń impulsów z preparatu promieniotwórczego, jaką mierzymy w ustalonym czasie, będzie w każdym pomiarze inna. Impulsy pochodzące od preparatu promieniotwórczego nie przychodzą w równych odstępach czasu (technicznie można to nawet zauważyć obserwując zachowanie przelicznika, który zatrzymujemy dopiero po wyznaczonym czasie), lecz są przypadkowo rozmieszczone „na osi czasu” analogicznie do rozmieszczenia zdarzeń przypadkowych w definicji rozkładu Poissona. Odchylenie standardowe w tym rozkładzie jest równe pierwiastkowi z wartości oczekiwanej. Opierając się na tym obliczamy **niepewność standardową** liczby zliczeń impulsów N na podstawie pojedynczego pomiaru

$$u(N) = \sqrt{N}.$$

Jest ona niezależna od jakichkolwiek parametrów eksperymentu (czas, rodzaj źródła, detektor itd.). Natomiast **niepewność standardowa** szybkości zliczeń impulsów na podstawie pojedynczego pomiaru zależy od czasu pomiaru i wynosi:

$$u(I) = \frac{\sqrt{N}}{t} = \sqrt{\frac{N}{t^2}} = \sqrt{\frac{I}{t}}.$$

Niepewność standardową **względną** pomiaru szybkości zliczeń impulsów na podstawie pojedynczego pomiaru obliczamy ze wzoru

$$u_r(I) = \frac{1}{\sqrt{tI}}.$$

Niepewność względną możemy wyrazić w procentach mnożąc jej wartość przez 100%.

Analizując wzór na niepewność standardową względną szybkości zliczeń dojdziemy do wniosku, że jest ona relatywnie duża. Wniosek jest następujący: jedynym sposobem polepszenia dokładności pomiaru zmiennej podlegającej rozkładowi Poissona jest zwiększenie liczby zliczeń czyli „uzyskanie dobrej statystyki”. Gdy warunki ćwiczenia są ustalone uzyskanie tego celu może nastąpić jedynie poprzez wydłużenie czasu pomiaru.

Prawo propagacji niepewności

Niektórych wielkości nie da się zmierzyć bezpośrednio. Wyznaczamy je na podstawie innych bezpośrednio mierzalnych wielkości. Wpływ tych wielkości x_i na daną wielkość y jest określona zależnością funkcyjną

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i).$$

Wielkości wejściowe x_i posiadają określone niepewności $u(x_i)$. Niepewności te przenoszą się – czyli propagują – na niepewność zmiennej y .

Najprostszym przypadkiem jest funkcja będąca wynikiem dodawania lub odejmowania dowolnej liczby składników, czyli

$$y = x_1 + x_2 - x_3 + \dots, \quad ,$$

wtedy **niepewność złożona** $u_c(y)$

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + \dots}$$

jest sumą geometryczną niepewności składników.

W pomiarach wykonywanych za pomocą licznika G-M (i innych detektorów impulsowych) obserwowana szybkość zliczeń jest z reguły sumą dwu składników: pochodzącego od samego interesującego nas zjawiska I_p i uwarunkowanego czynnikami ubocznymi w stosunku do niego (np. promieniowaniem kosmicznym, wyładowaniami w samym detektorze, ...itp.) nazywanego tłem układu pomiarowego I_T (krótko tłem). Tak więc mierzona szybkość zliczeń jest równa

$$I_{p+T} = I_p + I_T \Rightarrow I_p = I_{p+T} - I_T.$$

W celu wyznaczenia I_p należy wykonać pomiar tła I_T oraz pomiar szybkości zliczeń I_{p+T} .

Niepewność złożona pomiaru szybkości zliczeń I_p wynosi

$$u_c(I_p) = \sqrt{u^2(I_{p+T}) + u^2(I_T)},$$

gdzie: $u(I_{p+T})$ – niepewność standardowa szybkości zliczeń impulsów sumarycznych – tła i zjawiska,

$u(I_T)$ – niepewność standardowa pomiaru tła.

Ponieważ

$$u(I_{p+T}) = \frac{\sqrt{N_{p+T}}}{t_{p+T}} = \sqrt{\frac{I_{p+T}}{t_{p+T}}} \text{ oraz } u(I_T) = \frac{\sqrt{N_T}}{t_T} = \sqrt{\frac{I_T}{t_T}},$$

to

$$u_c(I_p) = \sqrt{\frac{N_{p+T}}{t_{p+T}^2} + \frac{N_T}{t_T^2}} = \sqrt{\frac{I_{p+T}}{t_{p+T}} + \frac{I_T}{t_T}}.$$

Względna niepewność złożona pomiaru szybkości zliczeń I_p wynosi:

$$u_{rc}(I_p) = \frac{\sqrt{\frac{I_{p+T}}{t_{p+T}} + \frac{I_T}{t_T}}}{I_{p+T} - I_T}.$$

Niepewność tą można wyrazić w procentach mnożąc prawą stronę przez 100.

W przypadku średniej arytmetycznej **niepewność złożona** I_p wynosi

$$u_c(\bar{I}_p) = \sqrt{\frac{\sum (I_{p+T}^i - \bar{I}_{p+T})^2}{n(n-1)} + \frac{\sum (I_T^i - \bar{I}_T)^2}{m(m-1)}},$$

gdzie

$$\bar{I}_{p+T} = \frac{\sum_i^n I_{p+T}^i}{n} ; \bar{I}_T = \frac{\sum_i^m I_T^i}{m} ;$$

sumowanie przebiega od $i = 1$ do n lub m , gdzie: m, n – liczba wykonywanych pomiarów.

Istotną cechą niepewności standardowej $u(y)$ wielkości y jest to, że w przedziale od $y - u(y)$ do $y + u(y)$ wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem 68%. Czasami interesuje nas jednak niepewność, która wybrana została tak, aby w powyższym przedziale znalazła się przeważająca część wyników pomiarów. Niepewność taką nazwano niepewnością rozszerzoną. Jest ona niepewnością standardową złożoną, pomnożoną przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k . W naszym doświadczeniu niepewność rozszerzona szybkości zliczeń impulsów z wybranego preparatu promieniotwórczego

$$U(I_p) = k u_c(I_p).$$

Zgodnie z międzynarodową praktyką do obliczeń przyjmujemy umowną wartość $k = 2$, której odpowiada prawdopodobieństwo realizacji zmiennej losowej w przedziale $y \pm U(y)$ równe 95% dla rozkładu Gaussa.

Przebieg eksperymentu:

1. Włączyć układ elektroniczny, sprawdzić działanie układu przeliczającego i ustawić pracę licznika G-M.
2. Wykonać pomiar tła (domki ołowiane powinny być zamknięte) –
 - jednokrotnie w dłuższym czasie
 - lub
 - kilkakrotnie w krótkich odstępach czasu.
3. Wstawić preparat promieniotwórczy do domku ołowianego, zamknąć go i przystąpić do pomiaru natężenia źródła promieniotwórczego (pomiar szybkości zliczeń).
Liczba zliczeń w indywidualnym pomiarze powinna być co najmniej równa 1000. Pomiar powtórzyć 5 razy.
4. Wykonać pomiar tła tak jak w pkt. 2.
5. Zmierzyć natężenie źródła promieniotwórczego wykonując:
 - 15 pomiarów – każdy po 1,5 minuty,
 - 15 pomiarów – każdy po 5 minut.

Uwaga: w trakcie pomiarów nie zmieniać geometrii układu doświadczalnego.

Opracowanie wyników:

1. Na podstawie pomiarów w pkt. 2-4 obliczyć:
 - Niepewność standardową szybkości zliczeń impulsów I_{p+T} i względną niepewność standardową.
 - Niepewność standardową złożoną i względną niepewność standardową złożoną szybkości zliczeń impulsów I_p .
 - Niepewność standardową złożoną dla średniej arytmetycznej szybkości zliczeń $\bar{I}_p$.
 - Niepewność rozszerzoną szybkości zliczeń $\bar{I}_p$.
2. Na podstawie pomiarów w pkt. 5 obliczyć:
 - Niepewność standardową dla średniej arytmetycznej szybkości zliczeń impulsów dla $\bar{I}_{p+T}$ każdej serii.
3. Ocenąć rolę tła i czasu pomiaru w przeprowadzonym eksperymencie.

Student winien wykazać się znajomością:

- Statystycznego ujęcia promieniowania korpuskularnego (rozkład Gaussa i Poissona w szczególności),
- Podstaw teorii niepewności pomiarowych.