

Ćwiczenie nr 14

Porównanie doświadczalnego rozkładu liczby zliczeń w zadanym przedziale czasu z rozkładem Poissona



Studenta obowiązuje znajomość:

- Podstawowych zagadnień z rachunku prawdopodobieństwa,
- Znajomość rozkładów statystycznych: dwumianowego, Poissona, normalnego w przypadku tzw. „złej” i „dobrej” statystyki (parametry rozkładów, zwrócić uwagę na różnice i sposób (warunki) przechodzenia od jednego do drugiego rozkładu).
- Podstaw prawa rozpadu promieniotwórczego.

Krótki opis teoretyczny

W większości doświadczeń przeprowadzanych na pracowni jądrowej dążymy do tego aby rejestrowane liczby zliczeń w obecności źródła promieniotwórczego były dostatecznie duże tak, żeby estymowanie otrzymanych wyników oprzeć na własnościach rozkładu normalnego (Gaussa).

Każdej powyższej sytuacji towarzyszy pomiar tzw. tła czyli rejestracja impulsów pochodzących z rozpadów promieniotwórczych w otaczającym nas środowisku. Powtarzając pomiar w tym samym przedziale czasu zauważymy rozrzut otrzymanych wyników pomiarów. Nie jest to podyktowane złym wykonywaniem pomiarów, ale statystycznym charakterem samego zjawiska promieniotwórczości.

Wykonujemy serię pomiarów $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n$ (n całkowita liczba pomiarów), których realizacja z kolejnych pomiarów stanowi zbiór zmiennych losowych niezależnych, dyskretnych o wartościach ze zbioru liczb całkowitych, nieujemnych $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Prowadząc pomiary tła nie jesteśmy w stanie określić, które z jąder atomowych się rozpadają, nie możemy też określić konkretnej liczby rozpadających się jąder. Jedno co możemy oszacować to średnią liczbę rozpadów w danym przedziale czasu t i to właśnie liczba $\bar{k}$ nam to wskazuje. Jeżeli mamy M jąder i prawdopodobieństwo rozpadu promieniotwórczego pojedynczego jądra w dowolnym, ale ustalonym czasie t oznaczmy przez p , to prawdopodobieństwo zliczenia k rozpadów w tym przedziale jest prawdopodobieństwem k "sukcesów" w M "próbach" ($p(k)$). Wobec tego faktu rozkład liczby zliczeń jest rozkładem dwumianowym $b(k, M)$. Jeżeli teraz przedział czasu t jest na tyle mały, że liczba jąder promieniotwórczych w M "próbie" praktycznie się nie zmienia w czasie jego trwania, tzn. $k \ll M$ oraz $p(k) \ll 1$, to wtedy rozkład prawdopodobieństwa $p(k)$ opisujemy tzw. rozkładem Poissona, otrzymanym z rozkładu dwumianowego w wyniku przejścia granicznego: $M \rightarrow \infty, p(k) \rightarrow 0$. Formułę tego rozkładu pierwszy opracował francuski matematyk Simeon-Denis Poisson w 1837 roku, a praktycznie zastosował i opisał w książce "The law of small numbers" Ladislaus von Bortkiewicz w roku 1898:

Wzór rozkładu Poissona

$$P(k, M) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

gdzie λ jest parametrem rozkładu $P(k)$.

Własności rozkładu:

- jest unormowany tzn., że $\sum_{k=0}^{\infty} P(k, \lambda) = 1$,
- wartość oczekiwana rozkładu $E(k) = \lambda$,
- parametry rozrzutu zmiennej losowej k wokół wartości oczekiwanej :
wariancja (nazywana też dyspersją) $V(k) = \lambda$,
odchylenie standardowe $\sigma(k) = \sqrt{\lambda}$.

Z powyższych równań wynika, że rozkład Poissona scharakteryzowany jest tylko jednym parametrem λ .

Najlepszym estymatorem wartości oczekiwanej zmiennej losowej k jest średnia arytmetyczna $\bar{k}$, obliczona ze wzoru:

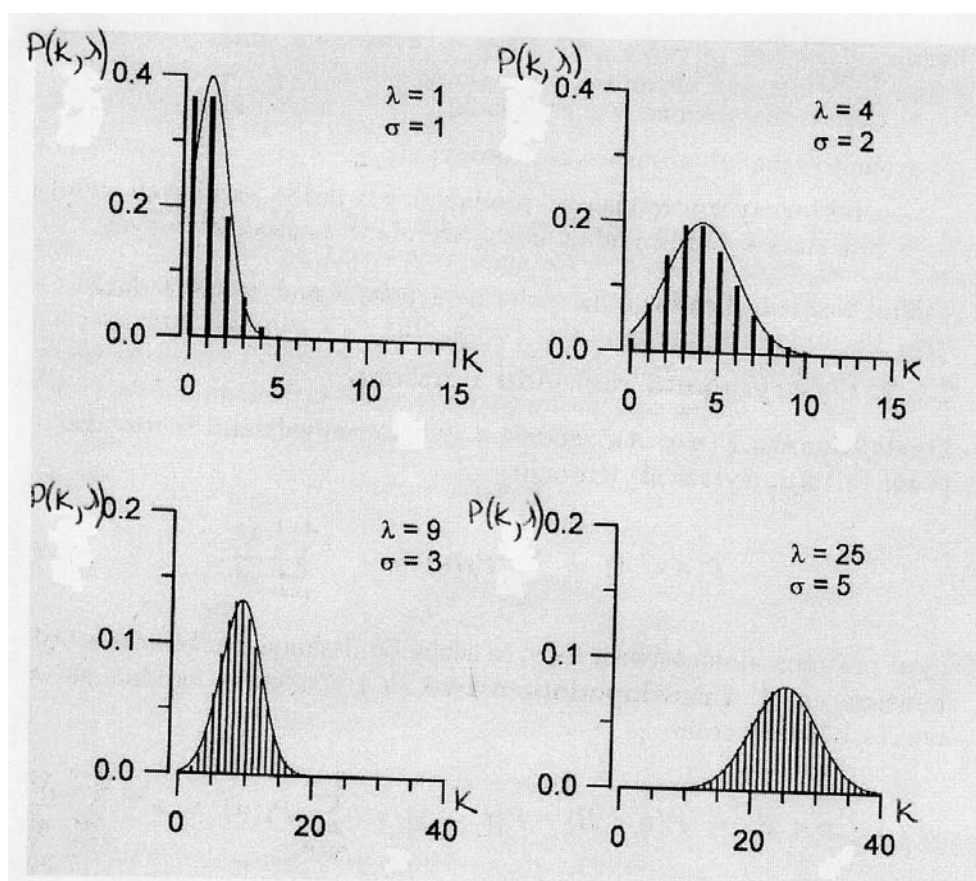
$$\bar{k} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n},$$

Obliczając wartość średnią, czyli wartość oczekiwaną rozkładu Poissona $P(k, \lambda)$ zobaczymy, że parametr λ jest po prostu wartością średnią zmiennej losowej k , czyli jest równy średniej arytmetycznej liczby zliczeń impulsów dużej serii pomiarowej

$$\lambda = \bar{k}.$$

Przy czym wraz ze wzrostem wartości średniej arytmetycznej liczby zliczeń rozkład Poissona robi się coraz bardziej symetryczny i dla dostatecznie dużej wartości średniej przechodzi w rozkład Gaussa.

Biorąc pod uwagę powyższą charakterystykę rozkładu Poissona zarówno dyspersja jak i odchylenie standardowe związane są ze średnią arytmetyczną liczby zliczeń. Oznacza to, że jeżeli będziemy rejestrować wyniki pomiarów liczby zliczeń impulsów dla wielkiej liczby n równych przedziałów czasu t , to w znacznej części tych przedziałów liczba zdarzeń k będzie różnić się od $\bar{k}$ nie więcej niż o $\sqrt{\bar{k}}$.



Przykłady rozkładu Poissona $P(k, \lambda)$ dla liczb $\lambda = 1, 4, 9, 25$. Linia ciągłą zaznaczono dla porównania rozkład normalny Gaussa $N(\lambda, \text{pierwiastek z } \lambda)$.

Technika pomiarów:

Ćwiczenie polega na pomiarze liczby impulsów licznika G-M eksponowanego promieniowaniem kosmicznym w kolejnych, jednakowych odstępach czasu t zgodnie z poniższymi wskazówkami:

1. Dobrać czas trwania pojedynczego pomiaru tak, aby średnia liczba zliczeń dla tego czasu wynosiła 7 - 10 impulsów.
2. Zmierzyć co najmniej 200-krotnie liczbę zliczeń dla zadanego przedziału czasu t .

Opracowanie wyników:

1. Wypełnić poniższe tabelki:

Numer i -tego pomiaru ($i = 1, 2, \dots, n$) n - całkowita liczba pomiarów	Liczba zliczeń k impulsów w i -tym pomiarze
1	
2	
3	
.....	
n	

Wybieramy dane k i wypełniamy tabelkę:

Liczba pomiarów N_k z danym k	Częstość występowania danego k : $p(k) = N_k/n$

2. Wyliczyć średnią arytmetyczną liczby zliczeń impulsów.
3. Sporządzić wykres funkcji $N_k(k)$ dla dwu przypadków:
 - a. uwzględnić tylko pierwszy pomiar,
 - b. uwzględnić tylko pierwsze 10 pomiarów.
4. Sporządzić wykres doświadczalnych częstości $p(k)$ i na tym samym wykresie nakreślić prawdopodobieństwo p_k obliczone z formuły rozkładu Poissona:

$$P(k) = \frac{(\bar{k}_{\text{exp}})^k}{k!} \exp(-\bar{k}_{\text{exp}}).$$

Porównać ten wykres z wykresem otrzymanym w pkt. 3b).

5. Obliczyć estymator wariancji badanego rozkładu (obciążony i nieobciążony):

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2,$$

$$S_1^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2.$$

Otrzymane wyniki porównaj z wartością teoretyczną wariancji $V(k)$.

Student winien wykazać się znajomością:

1. Podstawowego prawa rozpadu promieniotwórczego.
2. Rozkładów statystycznych: dwumianowego, Gaussa i Poissona.