Uniwersytet Wrocławski, Instytut Fizyki Doświadczalnej, I Pracownia

Ćwiczenie nr19

POMIAR STAŁEJ GRAWITACJI G (WAŻENIE ZIEMI)

Uwaga!

Urządzenie do pomiaru stałej grawitacji jest niezwykle delikatne i wrażliwe na wstrząsy. Bardzo cienka i droga nić metalowa, na której zawieszone jest wahadło, może urwać się przy nieostrożnym postępowaniu. Dlatego zabrania się studentom podejmowania prób regulacji przyrządu (wagi skręceń i kul) a nawet jego dotykania. Koszty ewentualnej naprawy wagi pokryje sprawca uszkodzenia. Nieostrożna manipulacja spowoduje także dodatkowe drgania wahadła, co utrudni i wydłuży czas pomiaru. Dlatego zmiany położenia dużych kul może dokonać tylko prowadzący ćwiczenie.

I. WSTĘP

Siłę oddziaływania grawitacyjnego F_g dwu ciał o masach M_1 i M_2 określa znany wzór Newtona:

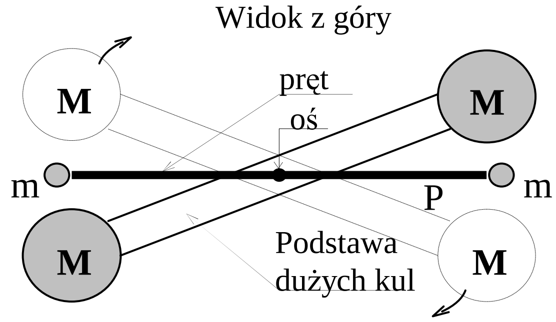
$$F_g = G\frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \tag{1}$$

gdzie G jest tzw. stałą grawitacji a r odległością środków mas obu ciał.

Siła oddziaływania grawitacyjnego „zwykłych” mas, np. dwu kul o masach 1 kg których środki oddalone są o 5 cm jest niezwykle mała i trudna do zmierzenia. Dla podanego przykładu siła ta wynosi jedynie 2.7×10^{-8} niutona. Jest więc ona kilka milionów razy słabsza od siły ciężkości działającej na każdą z tych kul ze strony Ziemi. Jeśli jednak udałoby się ją zmierzyć możliwie dokładnie, to moglibyśmy wyznaczyć wartość stałej grawitacji G. Wtedy przez pomiar siły, z jaką Ziemia o masie M_z przyciąga ciała o znanej masie M. moglibyśmy obliczyć masę Ziemi, czyli ją zważyć. Znając promień kuli ziemskiej a więc i jej objętość moglibyśmy obliczyć średnią gęstość materii, z której jest zbudowana. Dlatego przez wiele lat podejmowano próby eksperymentalnego wyznaczenia stałej grawitacji. Piękny opis rozwoju tych badań można znaleźć w książce A. K. Wróblewskiego i J. A. Zakrzewskiego [1].

Spośród kilku metod wyznaczania stałej grawitacji, opiszemy tutaj tylko najstarszą i najbardziej znaną metodę wagi skręceń Henry Cavendisha (1798). Zasadę jej działania pokazuje Rys. 1.

Na cienkiej, sprężystej nici, będącej osią obrotu, zawieszono poziomo lekki pręt P, obciążony na obu końcach kulkami o jednakowych masach m, tak że może on obracać się w płaszczyźnie poziomej



Rys. 1. Schemat wagi skręceń Cavendisha

(tu w płaszczyźnie rysunku). W pobliżu tych kulek, na podstawie, którą można obrócić, umieszcza się symetrycznie, dwie duże kule o masach M, tak by każda przyciągała „swoją” masę m z taką samą siłą. Pod wpływem przyciągania grawitacyjnego będzie następował obrót pręta i skręcanie nici, na której jest on zawieszony. W zależności od tego, z której strony mas m zbliżymy masy M (patrz Rys. 1., linie ciągłe, lub przerywane) kierunek obrotu pręta będzie różny. Skręcenie nici spowoduje powstanie sił sprężystych, przeciwdziałających obrotowi. Warunkiem równowagi statycznej takiego układu jest warunek, aby moment pary sił przyciągania grawitacyjnego obu par kulek 2 N_g i moment sił sprężystości N_s były sobie równe. Pierwszy z nich obliczymy mnożąc siłę grawitacji obliczoną wg wzoru (1) przez odległość d środka masy m od osi obrotu.

$$N_g = 2d \cdot F_g = 2d \cdot G\frac{mM}{r^2} \tag{2}$$

Dla momentu sił sprężystości teoria przewiduje:

$$N_S = K_S\varphi = \frac{\Gamma\pi\rho^4}{2l}\varphi \tag{3}$$

gdzie K_s jest współczynnikiem sprężystości charakteryzującym właściwości nici przy skręcaniu, nazywanym także momentem kierującym, φ jest kątem skręcenia, Γ modułem sztywności materiału nici, ρ jest promieniem nici, a l jej długością. Wyznaczenie wartości K_s na podstawie wzoru (3) jest mało dokładne, ze względu na to, że Γ zależy silnie od technologii wykonania i historii nici i nie można jej wziąć z tablic. Korzystniej jest wyznaczyć wartość K_s eksperymentalnie, wykorzystując fakt, że pręt z kulkami wykonuje drgania skrętne (torsyjne) wokół położenia równowagi z okresem T. Równanie ruchu takiego wahadła bez uwzględnienia oddziaływania grawitacyjnego kul ma postać:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + K_s\varphi = 0 \tag{4}$$

gdzie J jest momentem bezwładności wahadła (małych kul na pręcie), φ jest kątem skręcenia wahadła Okres drgań wahadła T, wyznaczony z równania (4) jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K_s}} \tag{5}$$

stąd

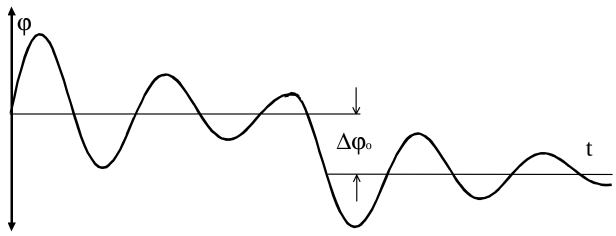
$$K_s = \frac{4\pi^2 J}{T^2} \tag{6}$$

Jeśli pominiemy moment bezwładności lekkiego pręta, to moment J zawieszonych na nim kul jest równy $2md^2$, czyli:

$$K_s = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2} \tag{7}$$

II. OPIS EKSPERYMENTU.

Ponieważ pod wpływem oddziaływania grawitacyjnego obu par kul wahadło skrętne wykonuje zanikające w czasie drgania harmoniczne (patrz równania (4) i (5)), musimy wyznaczyć środek tych oscylacji, bądź odczekać dostatecznie długo aż ustali się położenie równowagi. Ten drugi sposób nie może być zastosowany w pracowni studenckiej, ze względu na ograniczony czas przeznaczony



Rys. 2. Zapis ruchu plamki świetlnej wahadła torsyjnego.

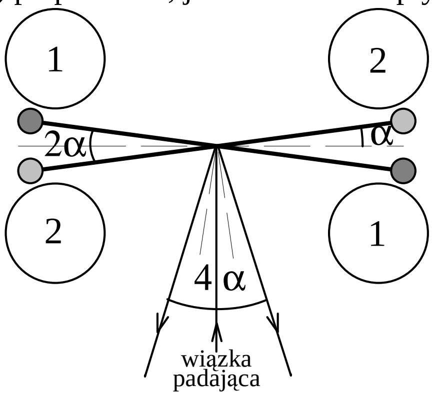
na wykonanie ćwiczenia. Różnica położeń środków oscylacji wahadła Δφ, przy zbliżeniu dużych mas M z jednej, lub drugiej strony do mas m (patrz rys. 2.), będzie miarą sił oddziaływania grawitacyjnego obu par kul. Skręcenie nici jest obserwowane za pomocą wiązki świetlnej, odbitej od zwierciadełka przyklejonego do wahadła i skierowanej na ekran z podziałką milimetrową.

Kąt skręcenia wahadła φ jest równy:

$$\varphi = \frac{\Delta b}{4L} \tag{8}$$

gdzie Δb jest przesunięciem plamki na ekranie, a L odległością zwierciadła od ekranu. Czwórka w mianowniku wynika z faktu, że (patrz rys 3) po pierwsze, jak wiadomo z optyki geometrycznej kąt

Rys. 3. Uzasadnienie wzoru (8).



odbicia promienia od zwierciadła jest dwa razy większy od kąta jego obrotu, a po drugie procedura pomiaru stałej G polega na umieszczaniu mas M najpierw z jednej strony mas m. (pozycja 1), a następnie z drugiej (pozycja 2). Wtedy wychylenie plamki jest dwa razy większe niż w sytuacji, w której na początku eksperymentu mierzylibyśmy wychylenie względem swobodnego położenia wahadła, bez mas M w pobliżu małych kulek (linia przerywana). Taka procedura jest wprawdzie teoretycznie możliwa, ale nakładanie i zdejmowanie ciężkich kul M, grozi uszkodzeniem delikatnej nici.
Moment N_s pary sił skręcających będzie równy:

$$N_s = K_s \cdot \varphi = \frac{8\pi^2 md^2}{T^2} \cdot \frac{\Delta b}{4L} \tag{9}$$

Przez porównanie z momentem pary sił grawitacyjnych N_g mamy:

$$2d \cdot G\frac{mM}{r^2} = \frac{2\pi^2 md^2 \Delta b}{T^2 L} \tag{10}$$

a stąd G jest równe:

$$G = \frac{\pi^2 r^2 d\ \Delta b}{MT^2 L} \tag{11}$$

III. POMIARY

Ruch wahadła obserwujemy za pomocą wiązki światła laserowego, która odbija się od zwierciadła przyrządu i pada na skalę.

1. Obserwujemy początek ruchu plamki świetlnej na skali wychyleń. Prosimy prowadzącego zajęcia o przesunięcie dużych kul w pierwsze skrajne położenie. Ta operacja musi być dokonana bardzo ostrożnie gdyż stuknięcie dużą kulą o osłonę szklaną spowoduje dodatkowe drgania plamki i utrudni obserwację ruchu wahadła przez dłuższy czas.

2. Zapisujemy w odstępach 30 sekundowych kolejne położenia plamki na skali, przez czas trwania dwu pełnych okresów wahadła. Trwa to ok. 30 minut. Następnie prosimy prowadzącego zajęcia o przesunięcie dużych kul w drugie skrajne położenie i ponownie rejestrujemy ruch plamki świetlnej, przez taki sam okres czasu.

IV. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

1. Sporządzamy wykres ruchu wahadła. Na jego podstawie obliczamy położenia środka wahań b_{01} i b_{02} (równoważne położeniu wahadła po zaniku oscylacji) dla pierwszego i drugiego ustawienia dużych mas M. Dla pierwszego ustawienia korzystamy ze wzoru:

$$b_{01} = \frac{\frac{b_1 + b_3}{2} + b_2}{2} = \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{4} \qquad (12)$$

gdzie b_1, b_2, i b_3 to wartości odpowiadające kolejnym maksimum i minimum wychylenia. Podobny wzór obowiązuje do wyznaczenia b_{02}, z tym, że za b_1, b_2, i b_3 podstawiamy odpowiednie wartości otrzymane z drugiej części wykresu.

2. Różnicę wartości $b_{01} - b_{02} = \Delta b$ podstawiamy do wzoru (11) i obliczamy stałą grawitacji G. Przyjmujemy, że masa M. dużej kuli jest równa 1,5 kilograma, odległość małej kulki m. od osi obrotu d jest równa 0,05 metra, a odległość r pomiędzy środkami mas M i m w położeniu równowagi wynosi 0,047 metra. Przy ruchu wahadła odległość ta zmienia się jedynie o ok. 2% i zmiany wartości r można pominąć. Odległość L zwierciadełka od ekranu wynosi 0,86m.

3. Znając siłę Fc, z jaką Ziemia przyciąga masę 1 kg, znajdującą się na jej powierzchni (F_c = mg, g = 9.81 m s^{-2}) oszacuj na podstawie wzoru (1) masę Ziemi M_z i porównaj z wartością podaną w tablicach fizycznych (M_z =5.98×10^{24} kg).

4. Zakładamy, że na dokładność wyznaczenia wartości G mają wpływ głównie dokładność wyznaczenia wartości Δb i okresu drgań T. Pozostałe wielkości występujące we wzorze (11) są podane przez producenta z precyzją pozwalającą zaniedbać ich wpływ na wartość stałej grawitacji. Wtedy wzór (11) możemy zapisać w postaci

$$G = \frac{A\,\Delta b}{T^2} \qquad \text{gdzie } A = \frac{\pi^2 r^2 d}{ML}$$

Analizujemy wykres ruchu wahadła i szacujemy dokładność, z jaką możemy wyznaczyć poszczególne wartości b_1, b_2 i b_3 (na podstawie rozrzutu punktów w najbliższym otoczeniu maksimów i minimów, a następnie obliczamy niepewność wyznaczenia wartości Δb, czyli $u(\Delta b)$.

Podobnie, na podstawie wykresu drgań wahadła (położenia kolejnych maksimów i minimów) szacujemy niepewność wyznaczenia okresu, czyli u(T). Wtedy niepewność u(G) można wyznaczyć ze wzoru:

$$U(G)/G = u(\Delta b)/\,\Delta b + 2\,u(T)/T$$

IV. LITERATURA

[1]. A. Wróblewski, J. Zakrzewski, Wstęp do Fizyki, tom II, cz.1 PWN Warszawa 1989 str. 317 i nast.
[2]. H. Szydłowski, Pracownia Fizyczna, PWN Warszawa 1999.

V. ZAGADNIENIA DO KOLOKWIUM

Prawo ciążenia powszechnego. Sposoby wyznaczania stałej grawitacji ze szczególnym uwzględnieniem metody wagi Cavendisha.